Методы дискретной оптимизации

Эйлеровы пути и циклы. Критерий существования эйлеровых путей. Оценки сложности задачи построения эйлерового цикла

Эйлеровы циклы. Задача китайского почтальона

Определение.

Цикл, содержащий все ребра графа, называется эйлеровым. Граф называется эйлеровым, если в нем существует эйлеров цикл.

Напомним, что цикл, по определению, не содержит повторяющихся ребер. Таким образом, эйлеров цикл проходит по всем ребрам графа ровно по одному разу. Именно о таком маршруте спрашивается в задаче о кенигсбергских мостах. Следовательно, эйлеровы графы – это в точности те графы, для которых разрешима обобщенная задача о мостах.

Задача китайского почтальона.

Почтальон должен разнести почту по вверенному ему району, для чего он проходит по всем без исключения улицам района и возвращается в исходную точку (на почту). Требуется найти кратчайший маршрут почтальона.

Задача китайского почтальона.

Данная задача вполне современна: оптимальные маршруты нужно прокладывать для разнообразных машин, поливающих, посыпающих и размечающих улицы городов. В представлении задачи китайского почтальона графом, перекрестки соответствуют вершинам, а отрезки улиц между перекрестками – ребрам. Правильной моделью будет взвешенный граф, в котором ребрам приписаны положительные числа. Сейчас мы ограничимся решением задачи китайского почтальона в частном случае, в котором в качестве модели достаточно использовать обычный граф.

Если граф эйлеров, то один из эйлеровых циклов является оптимальным маршрутом китайского почтальона. В следующей теореме устанавливается связь между степенями вершин связного графа и наличием эйлерова цикла в нем. Считаем, что при наличии петли степень вершины учитывается дважды.

Теорема Эйлера

Теорема 1 (Эйлера)

Граф без изолированных вершин является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны.

Доказательство. *Необходимость* Пусть G – эйлеров граф без изолированных вершин, в нем существует цикл, проходящий через все ребра графа. Тогда каждая вершина инцидентна хотя бы одному ребру этого цикла, а значит, данный цикл проходит по всем вершинам. Следовательно, любые две вершины в G соединены маршрутом, являющимся частью эйлерова цикла, т. е. G связен. Осталось доказать, что степени всех вершин графа G четны. Пусть v – произвольная вершина. Обходя граф по эйлерову циклу, мы зайдем в вершину v столько же раз, сколько выйдем из нее. При этом каждое инцидентное v ребро используется либо только для захода в v, либо только для выхода из v, за исключением петель, которые используются и для захода, и для выхода. Поскольку при подсчете степени вершины каждая петля учитывается дважды, а остальные ребра (учитываемые по одному разу) разбиваются на пары «входящее ребро – исходящее ребро», степень v должна быть четной.

Теорема Эйлера

Продолжение._Достаточность_ Возьмем связный граф G, в котором степени всех вершин четны, и построим в нем эйлеров цикл. Если в G есть петли, то можно: либо удалить петли (связность графа и четность степеней вершин не нарушатся) и построить эйлеров цикл в получившемся графе, либо встроить петли в построенный цикл, получая эйлеров цикл в исходном графе. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что в G нет петель. Пусть v_0 произвольная вершина графа G. Так как v_0 не изолированная, можно построить цепь с началом в v_0; построим ее, выбирая ребра $e_1, e_2, \ldots$ произвольно и остановившись в момент, когда цепь нельзя продолжить (т. е. все ребра, инцидентные вершине, в которую мы попали, уже включены в цепь). Поскольку число ребер в графе конечно, мы остановимся через конечное число шагов. Пусть нами построена цепь $e_1, \ldots, e_k$, проходящая по вершинам $v_0, \ldots, v_k$. Докажем, что $v_k = v_0$, т. е. мы построили цикл. Предположим, что v_k не совпадает с v_0. Тогда, проходя всю цепь от v_0 к v_k, мы сколько-то раз, скажем, l раз, входили в вершину v_k и $l-1$ раз из нее выходили, причем все ребра, по которым мы входили и выходили, различны. Таким образом, в построенной цепи ровно $2l-1$ ребер, инцидентных v_k. Поскольку степень вершины v_k четна, то существует инцидентное v_k ребро, не входящее в цепь, что противоречит построению цепи. Следовательно, $v_k = v_0$.

Теорема Эйлера

Продолжение. Обозначим цикл, образованный ребрами $e_1, \dots, e_k$, через C_1 (см. рис. 1).

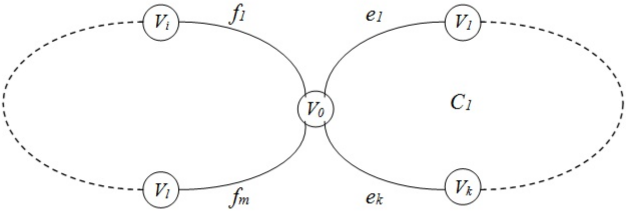

Рис. 1

Если он эйлеров, построение закончено. Пусть C_1 не эйлеров, т. е. в графе $G_1 = G \backslash \{e_1, \dots, e_k\}$ есть ребра. Среди этих ребер есть инцидентное вершине цикла C_1, так как в противном случае C_1 – компонента связности графа G, не совпадающая со всем графом, что противоречит связности G. В графе G_1, так же как и в исходном графе G, степени всех вершин четны. Действительно, при удалении ребер $e_1, \dots, e_k$ степень каждой из вершин $v_0, \dots, v_k$ уменьшилась на четное число, а степени остальных вершин не изменились.

Теорема Эйлера

Окончание доказательства. Рассмотрим компоненту связности графа G_1, содержащую ребро f_1. Внутри этой компоненты связности можно, начав с вершины v_i, построить цикл C_2, состоящий из ребер $f_1, \ldots, f_m$, тем же способом, которым был построен цикл C_1. Тогда последовательность ребер $e_1, \ldots, e_i, f_1, f_2, \ldots, f_m, e_{i+1}, \ldots, e_k$ также образует цикл (обозначим его C_2) и этот цикл содержит больше ребер, чем C_1. Если цикл C_2 эйлеров, построение закончено. В противном случае повторим описанное выше рассуждение, расширив цикл C_2 до цикла C_3, и т. д. Поскольку число ребер в G конечно, на каком-то шаге очередной построенный цикл окажется эйлеровым. Построение завершает доказательство.

Пример

Пример. В классической задаче Эйлера о Кенигсбергских мостах требуется определить маршрут, который начинается и заканчивается в одной и той же точке суши и проходит по каждому из семи мостов ровно один раз (Рис. 2).

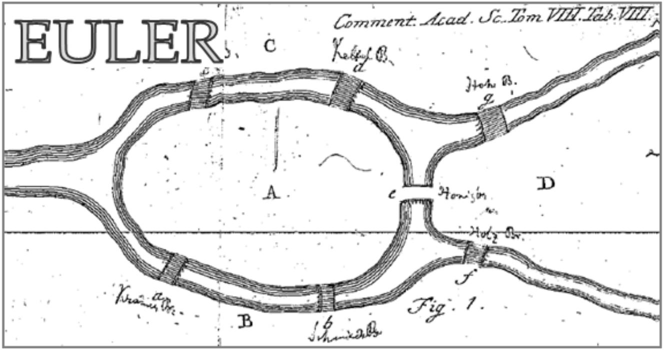

Рис. 2

Пример

Граф, соответствующий схеме мостов, определяется следующим образом: часть суши соответствует вершине, ребро соответствует мосту (Рис. 3). Построенный мультиграф не удовлетворяет условию теоремы 1, поэтому искомый маршрут не существует.

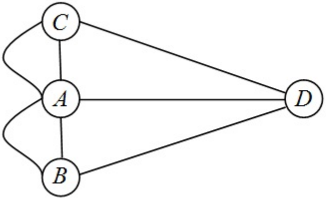

Рис. 3

Приведенное доказательство достаточности в теореме Эйлера является конструктивным, т. е. содержит алгоритм построения эйлерова цикла. Для практического нахождения эйлерова цикла часто пользуются немного другим алгоритмом, формальное определение которого приведено ниже.

Алгоритм Флери

1. Положить текущий граф равным G, а текущую вершину равной произвольной вершине $v \in V(G)$.
2. Выбрать произвольное, с учетом ограничения (см. ниже) ребро е текущего графа, инцидентное текущей вершине.
3. Назначить текущей вторую вершину, инцидентную e.
4. Удалить e из текущего графа и внести в список.
5. Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2.

Ограничение алгоритма: если степень текущей вершины в текущем графе больше 1, нельзя выбирать ребро, удаление которого из текущего графа увеличит число компонент связности в нем.

Алгоритм Флери. Продолжение

Для учета указанного ограничения приведенного формального описания недостаточно для полной формулировки алгоритма. Данный алгоритм в более подробном описании соответствует алгоритму поиска в глубину, отличие от поиска в глубину здесь состоит в том, что вместо вершин как пройденные помечаются ребра. Вершины могут посещаться несколько раз, но каждое ребро проходится не более одного раза, так что в полученном маршруте ребра не будут повторяться. Для учета ограничения алгоритма определим пару стеков S_1, S_2. Сначала исходя из начальной вершины x_1 последующие вершины пути накапливаются в первом стеке S_1 слева направо в соответствии с последовательностью посещения вершин: $S_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}\}$. Последняя вершина x_{k_1} стека является тупиковой – все ребра, инцидентные x_{k_1}, уже пройдены. Так как степени всех вершин графа четны, в этот момент пройденные ребра образуют цикл, но он может включать не все ребра графа. Для обнаружения еще не пройденных ребер возвращаемся по пройденному пути, перекладывая вершины из стека S_1 в стек $S_2 = \{x_{k_1}, x_{k_1-1}, \ldots, x_{p_1+1}\}$, пока не встретим вершину x_{p_1}, которой инцидентно непройденное ребро. В стеке S_1 останутся вершины $\{x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}\}$. Так как граф связен, такой номер $p_1 < k_1$ обязательно встретится.

Алгоритм Флери. Продолжение

Исходя из точки x_{p_1} движение вперед по непройденным ребрам возобновляется, при этом в стеке S_1 будут находиться вершины $\{x_1^1, x_2^1, ..., x_{p_1}^1, x_1^2, x_2^2, ..., x_{k_2}^2\}$, где $x_l^1 = x_l, l = 1, 2, ..., p_1$, точки $x_l^2, l = 1, ..., k_2$ не были пройдены ранее, точка $x_{k_2}^2$ тупиковая. Далее повторяются рассуждения проведенные выше и процесс заканчивается, когда в очередном тупике обнаруживается, что стек S_1 пуст. В этот момент в стеке S_2 находится последовательность вершин эйлерова цикла.

Пример. Пусть $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$. Последовательность шагов:
$S_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \Leftrightarrow S_1 = \{1, 2, 3, 1\} \Rightarrow 1$ – тупиковая вершина.
Полагаем $S_2 = \{1, 3, 2, 4, 5, 2\}, S_1 = \emptyset \Rightarrow S_2$ – искомый эйлеров цикл.

Алгоритм Флери. Теорема о корректности

Теорема 2

Алгоритм корректно определяет последовательность ребер и строит эйлеров цикл в эйлеровом графе.

Доказательство. Из способа построения стеков следует, что во второй стек содержит только те вершины, из которых не выходят ребра. Поэтому ребра могут выходить из вершин первого стека. В первый стек первой попадает вершина x_1 и она последней его покидает. Поэтому построенный маршрут замкнут: выходит из первой вершины и туда же возвращается. Кроме того, все ребра входят в построенный цикл: если ребро $e = (x, y)$ входит в E, то из первого стека не может быть удалена вершина x, как и y. Далее, в процессе построения стеков на каждом шаге пройденное ребро вычеркивается, поэтому любое ребро не может присутствовать в маршруте более одного раза. Теорема доказана.

Оценка сложности построения эйлерова цикла: Алгоритм Флери заносит ребро в первый стек один раз. Во второй стек аналогично. Следовательно, число необходимых вычислений имеет порядок $O(m)$.

Полные циклы

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $N = 2^n$.

Определение

Последовательность $a_1, a_2, ..., a_{N+n-1}$ над алфавитом $\{0, 1\}$, называется полным циклом(последовательностью де Брёйна), если множество слов $a_1a_2...a_n; a_2a_3...a_{n+1}; ...; a_Na_{N+1}...a_{N+n-1}$ состоит из всех возможных N последовательностей $b_1b_2...b_n$ из нулей и единиц.

Пример. $n = 2, N = 4 \Rightarrow a_1, a_2, ..., a_N = 0011 \Rightarrow \{00, 01, 11, 10\}$ – множество всевозможных слов длины 2, записанных в алфавите из нулей и единиц. Если положить другой набор, например 0101, то пары будут такими: $\{01, 10, 01, 10\}$, т.е. последовательность 0101 не является полным циклом. Легко проверить непосредственно, что при n=2 указанный набор определяет единственно возможный полный цикл.

$n = 3, N = 8 \Rightarrow a_1, a_2, ..., a_N = 0001011100 \Rightarrow$ $\{000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100\}$ – множество всевозможных слов длины 3, записанных в алфавите из нулей и единиц. Рассмотрим другой набор: $00011101 \Rightarrow 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100$ – также множество всевозможных слов длины 3, записанных в алфавите из нулей и единиц.

Полные циклы. Граф де Брёйна

Рассмотрим произвольное слово $b_1b_2...b_n$ длины n над алфавитом $\{0,1\}$ и соединим дугой, т.е. направленным ребром слова $b_1b_2...b_{n-1}$ и $b_2b_3...b_n$, которые считаем элементами множества V. Под петлями понимаем слова 11...1 и 00...0. В полученном псевдоорграфе $|V| = 2^{n-1}$, $|E| = 2^n$.
$G_n = (V, E)$ – граф де Брёйна. Рассмотрим его свойства.
$b_1b_2...b_{n-1} \in V \Rightarrow (0b_1b_2...b_{n-2}, b_1b_2...b_{n-1}), (1b_1b_2...b_{n-2}, b_1b_2...b_{n-1})$ пара входящих в вершину $b_1b_2...b_{n-1}$ дуг,
$(b_1b_2...b_{n-1}, b_2...b_{n-2}0), (b_1b_2...b_{n-1}, b_2...b_{n-2}0)$ – пара выходящих из этой вершины дуг. Следовательно, из каждой вершины графа выходит пара дуг и в нее входит пара дуг. Кроме того, G_n – связный граф: если две произвольные вершины $b_1b_2...b_{n-1}, c_1c_2...c_{n-1} \in V$, то последовательность дуг $(b_1b_2...b_{n-1}, b_2b_3...b_{n-1}c_1), (b_2b_3...b_{n-1}c_1, b_3b_4...b_{n-1}c_1c_2), ...,$
$..., (b_{n-1}c_1c_2...c_{n-2}, c_1c_2...c_{n-1})$ соединяет эти два слова.

Полные циклы

Лемма 1

Множество эйлеровых циклов в графе G_n взаимно однозначно соответствует множеству полных циклов длины 2^n.

Доказательство. По построению ребер графа G_n ребро $(b_1 b_2 ... b_{n-1}, b_2 b_3 ... b_{n-1} c_1)$ однозначно соответствует слову $b_1 b_2 ... b_{n-1} c_1$, таких различных слов 2^n, поэтому множество из 2^n таких «соседних» слов, т.е. циклов де Брёйна, однозначно соответствует последовательности дуг в эйлеровом цикле.
Определение. Орграф G называется 2-графом, если для каждой вершины имеется 2 дуги входящие и две выходящие из нее.

Построенный граф G_n является 2-графом.
Определение. Для 2-графа G двойственным графом называется граф $G^* = (B, U)$, для которого:

1. $B_0 \in E \Leftrightarrow b_0 \in B$
2. $B_0, B_1 \in E, B_0 = (a, b_0), B_1 = (b_0, c) \Rightarrow \exists (b_0, b_1) \in U$

Из доказательства леммы 1 следует $G_n^* = G_{n+1}$

Полные циклы

Лемма 2

Если 2-граф $G = (V, E) : |V| = m$ имеет M полных циклов, то G^* имеет $M \cdot 2^{m-1}$ полных циклов.

Следствие (Теорема де Брёйна)

Для всякого натурального n существует ровно $2^{2^{n-1}-n}$ циклов де Брёйна.